數學傳播　48卷2期, pp. 19-30

從馬克士威到勞侖茲到愛因斯坦
紀念李怡嚴教授(1937～2024)

張海潮

李怡嚴於27歲學成回台, 歷任清華物理系副教授、教授, 退休後, 仍寓居清華附近終老。李教授回台後, 發展了一套中文教材《大學物理學 1–4 冊》嘉惠學子無數。本文主要談論愛因斯坦狹義相對論形成之思想背景附帶略述《大學物理學》對本人有所啟發的內容, 以此紀念李教授。本文共分五節, 第一節簡述李教授對狹義相對論的看法 (見大學物理學第二冊第八章)。第二節綜理馬克士威方程式及電磁場所滿足的波動方程式。第三節討論馬克士威認爲光是一種電磁波及該方程滿足勞侖茲不變性。第四節討論愛因斯坦狹義相對論的思想基礎。第五節以相對論原理和光速恆定原理的相容總結本文。

第一節 李教授看狹義相對論

在《大學物理學》第二冊 8–3 節, 作者有下列說明 (註1)

在愛因斯坦發表狹義相對論前不久, 勞侖茲做了一個很有趣的純數學工作, 他發現在有相對運動的兩個慣性坐標間做下列的轉換: (原文之 u, 我改成 v、同見註1)

$$
\begin{aligned}
x' &= x - vt\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= t - \frac{vx}{c^2}\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},
\end{aligned}
$$

則馬克士威方程不變, 此種時空轉換稱爲勞侖茲轉換 (Lorentz transformation), 因此馬克士威方程式具有勞侖茲不變性 (Lorentz invariance); 此式所包含的物理意義, 勞侖茲並不了解, 一直到狹義相對論發表之後, 其中奧妙才爲人所知曉。

衆所周知, 馬克士威自始困擾於他的方程式並非牛頓力學下的伽利略不變, 亦即在伽利略

變換:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t \end{aligned}$$

之下, 馬克士威方程的形式無法維持。馬克士威甚至認為他的方程式只適用於一個絕對靜止的空間, 而不適用於其他的慣性系統, 否則將抵觸牛頓力學 (註2)。

李教授接著說: 在狹義相對論發表以前, 物理學家們所遭遇到的困難 (指上述馬克士威方程式不滿足伽利略變換) 在這種情況下, 物理學的發展似乎只有兩條路可走 (註3):

(1) 保留伽利略不變性的觀念, 因此認為牛頓力學是正確的。但為電磁學找一個更恰當的說明。(例如馬克士威方程式只適用絕對靜止的空間, 該空間充滿了靜止的以太。)

(2) 放棄伽利略不變性的觀念, 而採取龐加萊 (Poincaré) 的建議, 即任何物理定律皆應有勞侖茲不變性。因此, 電磁學是正確的, 而需要修正牛頓力學, 使其具有勞侖茲不變性; 並且要給時間及空間一個新的意義。

(愛因斯坦採取的是第二條路, 不過, 並無證據顯示愛因斯坦看過龐加萊的主張。)(同註3)

下面, 我們先討論馬克士威方程式的勞侖茲不變性, 然後在第五節再來回顧李教授的看法。

第二節 馬克士威得到 $\mathbb{E},\mathbb{B}$ 的波動方程, 波速為 $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c=$光速

馬克士威 (James Clerk Maxwell, 1831∼1879) 是牛頓 (1643∼1727) 之後最重要的物理學家。他在 1864 年發表的論文《電磁場的動力學理論》中總結電磁理論, 列出了涉及 20 個未知量的 20 個方程式。後來在 1884 黑維賽 (Oliver Heaviside, 1850∼1925) 以向量微積分將馬克士威的方程組重新編排成四個方程式, 一直使用到現在。(註4)

在自由空間中 (即無介質的空間) 這四個微分方程式為

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = \rho/\varepsilon_0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0\Big[\mathbb{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}\Big], \tag{4}$$

式中 $\mathbb{E},\mathbb{B}$ 分別代表電場和磁場, ρ, $\mathbb{J}$ 分別代表電荷密度和電流密度, ε_0,μ_0 分別代表真空介

電常數和真空磁導率。$\mathbb{E}, \mathbb{B}, \rho, \mathbb{J}$ 均爲 (t, x, y, z) 的函數, ε_0, μ_0 是慣性系統的常數 (註 5, 註 6)。

從 (1)∼(4), 我們可以得出 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{B}$ 均滿足波動方程式, 波速是 $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, 恰好是光速 (並見註 6)。

以下就 $\mathbb{J} = 0$, $\rho = 0$ 的情形討論 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{B}$ 的情形。首先考慮 $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E})$, 利用 $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E}$ (註7)

將 (3) 式和 (1) 式代入, 得(此時 $\rho = 0$, $\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$)

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2\mathbb{E} = -\nabla^2\mathbb{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbb{B}),$$

再以 (4) 代入, 得

$$-\nabla^2 E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbb{B}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2} \text{ (此時 } \mathbb{J} = 0),$$

故得

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\mathbb{E} = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\mathbb{E}. \tag{5}$$

這是一個波速爲 $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ 的波動方程 (wave equation), $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$=光速 (註 8, 並見註 6)

同理, 計算 $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{B}) - \nabla^2\mathbb{B}$:

由 (4), $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = \nabla \times \Big(\mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\mathbb{E}}{\partial t}\Big) = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbb{E}$ (此時 $\mathbb{J} = 0$), 將 $\nabla \times \mathbb{E}$ 以 (3) 代入, 得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbb{B}) - \nabla^2\mathbb{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbb{B}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbb{B}}{\partial t^2}.$$

由 (2), $\nabla \cdot \mathbb{B} = 0$ 得

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbb{B}}{\partial t^2} = \nabla^2\mathbb{B} = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\mathbb{B}, \tag{6}$$

亦爲波速爲 $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ =光速的波動方程。(註8, 並見註6)

第三節 馬克士威認為光是一種電磁波及該組方程滿足勞侖茲不變性

馬克士威雖得到綜合電磁現象的方程式 (1)∼(4), 但卻從未在實驗室製造出電磁波(註9)。但是透過計算, 他得到電磁波在空間傳輸的速度是每秒 310,740,000 公尺, 這個數據和當時法

國物理學家 Fizeau 於 1849 所量測的光速, 每秒 314,858,000 公尺相當接近, 因此導致馬克士威認爲光是一種電磁波。他在 1864 發表的論文《電磁場的動力學理論 *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*》pp.577-580 中說

> "light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws"
> (註10, 並見註4)

記得在上一節, 從真空中的馬克士威方程 (1)∼(4), 取 $\nabla\times(\nabla\times\mathbb{E})$ 及 $\nabla\times(\nabla\times\mathbb{B})$, 我們得到兩個波速爲光速 c 的波動方程式

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\mathbb{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\mathbb{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbb{B}}{\partial t^2}. \tag{6}$$

令 $ct=x_0$, $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ 假設有另一個慣性坐標 (τ,ξ,η,ζ), τ 代表時間。

同樣令 $c\tau=y_0$, $\xi=y_1$, $\eta=y_2$, $\zeta=y_3$, (x_0,x_1,x_2,x_3) 和 (y_0,y_1,y_2,y_3) 之間是一個線性變換 (註 11) 我們想得到在兩個慣性系之間波算符 (wave operator) 全等的條件。亦即何時

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}.$$

將此算符作用於函數 f, 我們立下條件

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}.$$

爲了討論方便, 我們減少變數, 將條件改爲

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2},$$

此時線性變換的矩陣爲

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_0}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y_0}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad a,b,c,d\ \text{爲常數。}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}&=\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x_0}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_0}\Big)-\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big)\\&=\frac{\partial}{\partial x_0}(f_{y_0}a+f_{y_1}c)-\frac{\partial}{\partial x_1}(f_{y_0}b+f_{y_1}d)\\&=(f_{y_0y_0}a^2+f_{y_0y_1}ca+f_{y_1y_0}ac+f_{y_1y_1}c^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (f_{y_0y_0}b^2 + f_{y_0y_1}db + f_{y_1y_0}bd + f_{y_1y_1}d^2) \\
&= f_{y_0y_0} - f_{y_1y_1};
\end{aligned}
$$

此條件代表:

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= 1, \\
c^2 - d^2 &= -1, \\
ac - bd &= 0,
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}
$$

(7) 式即勞侖茲變換的定義。一般, 若 4×4 矩陣 $\Lambda = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$, 則勞侖茲變換的定義是

$$
\Lambda \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \Lambda^t = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}
$$

我們因此得出, 使波動算符 (5) (6) 不變的線性變換恰是勞侖茲變換 (註12)。

由上顯而易見, 欲使馬克士威方程 (1)～(4)不變, 則必須使 (5)、(6) 的波動算符不變 (見式 (8) 及註 12), 但同時, $\mathbb{E}, \mathbb{B}$ 也必須搭配經歷一個線性變換, 表示在火車上所見的電磁場。當勞侖茲變換是最基本的火車與月台的關係時:

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt), \\
y' &= y, \\
z' &= z, \\
t' &= \gamma\Big(t - \frac{vx}{c^2}\Big), \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},
\end{aligned}
$$

則月台所見 $\mathbb{E} = (E^1, E^2, E^3)$, $\mathbb{B} = (B^1, B^2, B^3)$ 與火車所見的 $\mathbb{E}' = (E^{1'}, E^{2'}, E^{3'})$, $\mathbb{B}' = (B^{1'}, B^{2'}, B^{3'})$ 之間的變換如下:

$$
E^{1'} = E^1, \qquad\qquad B^{1'} = B^1,
$$

$$E^{2'} = \gamma(E^2 - vB^3), \qquad B^{2'} = \gamma\Big(B^2 + v\frac{E^3}{c^2}\Big),$$

$$E^{3'} = \gamma(E^3 + vB^2), \qquad B^{3'} = \gamma\Big(B^3 - v\frac{E^2}{c^2}\Big),$$

(見大學物理學第三冊及註13)

注意到, 當我們在談論使馬克士威方程不變的線性變換時, μ_0, ε_0 本是不變的常數, 而方程中另一個關鍵的常數 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, 當然也一併不變。

換句話說, 光速 c 的恆定其實是馬克士威方程不變附帶的條件。

第四節 愛因斯坦狹義相對論的思想基礎

我們先看愛因斯坦之前, 幾位物理學家的關鍵工作。

一、馬克士威(1831～1879)

在1864 立下馬克士威方程, 綜合電場磁場理論, 並提出光是電磁波。(見本文二、三節)

二、赫茲(1857～1894)

在1887 於實驗室中製造電磁波, 驗證電磁波存在。

三、黑維賽(1850～1925)

在 1884 以向量微積分將馬克士威的方程組重新編排成四個方程式 (見本文第二節 (1)～(4)), 其中 (1) 是高斯 (庫倫) 定律 (2) 是磁場的高斯定律 (3) 是法拉第定律 (4) 是安培-馬克士威定律。

四、勞侖茲(1853～1928)

於1904提出勞侖茲變換 (見本文第一節), 說明馬克士威方程式的勞侖茲不變性。

五、愛因斯坦(1879～1955)

於 1905 發表《論動體的電動力學》(見凡異出版社出版的愛因斯坦文集第二卷 pp.83-115), 首次提出狹義相對論, 主張相對論原理和光速不變原理, 從而獨立得到勞侖茲變換及電磁場的協變關係式。

在《論動體的電動力學》這篇論文中, 一開始, 愛因斯坦就建議放棄絕對靜止的概念, 同時也放棄用以太作爲光傳播的介質 (見本文第一節)。

接著他又提出兩個假設: (見《論動體的電動力學》中譯本, 87頁)

(1) 物理體系的狀態據以變化的定律, 同描述這些狀態變化時所參考的坐標系究竟是用兩個在互相以等速移動的坐標系中的哪一個並無關係 (稱爲相對論原理)。

(2) 任何光線在「靜止的」坐標系中都是以確定的速度 c 運動著。不管這道光線是由靜止的還是運動的物體發射出來的 (稱爲光速恆定原理)。

對照《大學物理學, 二冊 450 頁》, 李怡嚴說:

(愛因斯坦) 寫下了他的兩大假設:

(1) 相對論原理: 在所有的以等速作相對運動的慣性系統中, 任何物理定律皆有同一形式。

(2) 光之速率在所有的慣性系統中皆爲一常數 c。

李教授接著說:

此兩條假設的重要性, 完全決定於是否能給予勞侖茲變換所牽涉的時空結構一個新的意義, 愛因斯坦最重要的貢獻也就是在這一方面。以他的時空觀念再加上他的兩大假設, 則勞侖茲變換是一個必然的時空轉換式。

我們先略提愛因斯坦的工作,《論動體的電動力學》包含兩部分, 第一部份稱爲運動學部份, 他只需假設光速恆定原理, 便得出了火車與月台之間的勞侖茲變換:(見註1)

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt),\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= \gamma\Big(t - \frac{vx}{c^2}\Big),\\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
$$

這部份獨立於馬克士威方程式, 亦即他不需要如勞侖茲一般藉助馬克士威方程的不變性來得到上述勞侖茲變換, 愛因斯坦只需利用光速恆定, 建立一個時空的結構。(見數學傳播 47 卷 1 期, 張海潮, 愛因斯坦對勞侖茲變換的簡單推導)

也就是說, 光速恆定原理比馬克士威方程更爲基本。

第二部份是電動力學部分, 此時根據相對論原理愛因斯坦假設馬克士威方程 (他稱此方程爲馬克士威赫茲方程) 不論在月台或是在火車均有同一形式: 〈月台坐標爲 (t, x, y, z), 火車坐標 (τ, ξ, η, ζ) 而得出, $\mathbb{E}', \mathbb{B}'$ 應有的相應轉換

月台$(\rho = 0, \mathbb{J} = 0)$ 火車$(\rho = 0, \mathbb{J} = 0)$

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \mathbb{E} = 0, && \nabla' \cdot \mathbb{E}' = 0,\\ &\nabla \cdot \mathbb{B} = 0, && \nabla' \cdot \mathbb{B}' = 0,\\ &\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, && \nabla' \times \mathbb{E}' = -\frac{\partial \mathbb{B}'}{\partial t'},\\ &\nabla \times \mathbb{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}, && \nabla' \times \mathbb{B}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbb{E}'}{\partial t'}, \end{aligned}$$

式中“ $'$ ” 代表對坐標 τ, ξ, η, ζ 操作, 而 $\mathbb{E}'$ 與 $\mathbb{B}'$ 的關係, 如本文第三節所示 (亦見《論動體的電動力學》中譯 100 頁), 注意到在兩個坐標系, c 都是一樣的 (299,792,458 公尺/秒)。

應該指出, 李教授在《大學物理學》第三冊花了不少篇幅以實例說明如果在月台上看到電磁場 $\mathbb{E}, \mathbb{B}$, 則在火車上看到的 $\mathbb{E}', \mathbb{B}'$ 和 $\mathbb{E}, \mathbb{B}$ 的 (線性) 關係, 有別於愛因斯坦在《論動體的電動力學》中利用馬克士威方程的不變性, 以代數的方法直接得出 $\mathbb{E}', \mathbb{B}'$ 應有的形式。其實不管哪一種方式都得用到在勞侖茲變換下, 馬克士威方程的形式不變或是馬克士威方程代表的物理內涵 (包含光速恆定)。也就是說, 馬克士威方程在坐標轉換下的不變性和光速恆定原理是同一回事。

第五節 總結(相對論原理與光速恆定原理的相容性)

《*The Science and the Life of Albert Einstein*》一書的作者 Abraham Pais 在該書 45 頁談到愛因斯坦在大學時代與老師 Weber 的相處和自學, Pais 說 Einstein, in turn, was not impressed with Weber's physics course. He did not care much for [Weber's] introduction to theoretical physics because he was disappointed not to learn anything new about Maxwell theory ......

He relied far more on self-study. As a student he read the works of Kirchhoff, Hertz, and Helmoholtz; learned Maxwell theory from the first edition of Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizitat by August Föppl, which had come out in 1894。(註14)

Pais 這段說明愛因斯坦透過自學掌握馬克士威的電磁理論。

如今回顧本文上一節愛因斯坦所提出的相對論原理和光速恆定原理, 不難發現相對論原理中所指的“物理定律”在愛因斯坦心中就是馬克士威方程式。在此方程式中出現了光速 c, 因此只要馬克士威方程在月台上或在火車上都成立時, 則相關的電磁波速或光速當然在月台上或火車上都是 c (現在的值是 299,792,458 公尺/秒)。

如此看來, 表面上光速恆定原理是馬克士威方程的結論之一, 但本質, 卻是比馬克士威方程更為基本。

所以愛因斯坦在 1905《論動體的電動力學》論文的第一部份, 只考慮時、空及光速恆定, 就直接得出勞侖茲變換 (同見註 1), 而在第二部份, 才來討論馬克士威方程在勞侖茲變換下,

$\mathbb{E}, \mathbb{B}$ 如何協變到 $\mathbb{E}', \mathbb{B}'$。(見本文第 4 節)

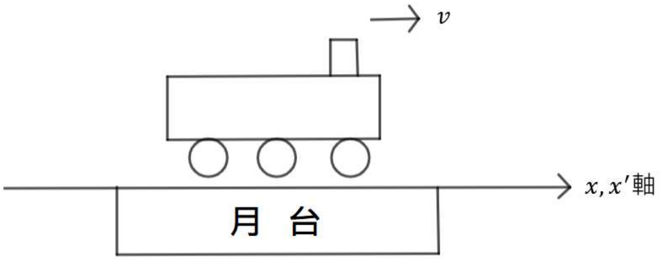
最值得一提的是, 愛因斯坦在《論動體的電動力學》這篇論文開宗明義就說:

我們要把這個猜想 (相對論原理) 提升爲公設, 並且還要引進另一條只是在表面上看來同前者不相容的公設: 光在眞空中總是以一確定的速度 c 傳播著, 這速度同發射體的運動狀態無關。由這兩條公設, 根據靜體的馬克士威理論, 就足以得到一個簡單而又不自相矛盾的動體電動力學。

這段話裡, 愛因斯坦說"只是在表面上看來同前者不相容" (原文是 which is only apparently irreconcilable with the former) 其實是指光速恆定原理和相對論原理本質上是同一回事。

註 1: Special Relativity, 在李書中譯爲"特殊"相對論, 在本文中一律譯作狹義相對論。此一理論首先討論兩個互以等速運動的慣性系統之間的時空變換, 即勞侖茲變換。

設月台和火車是互以等速運動的慣性系, 火車沿鐵軌向右以等速 v 運動, 如圖



鐵軌是月台的 x 軸, 火車本身是火車的 x' 軸, 我們要將月台所見 (t, x, y, z) 與火車所見 (t', x', y', z') 之間的變換寫出。

進一步假設月台之 $(0, 0, 0, 0)$ 對應火車之 $(0', 0', 0', 0')$ 則其間的變換 (稱爲勞侖茲變換) 服從

$$\begin{aligned} x' &= x - vt\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \\ t' &= t - \frac{vx}{c^2}\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

1905 年, 愛因斯坦在論文《論動體的電動力學》中假設火車與月台所見真空中之光速, 不論光源的速度, 均爲常數 (現在值爲 299,792,458 公尺/秒)(此即光速恆定原理), 愛因斯坦據此導出上述時空的勞侖茲變換 (見數學傳播 47 卷 1 期, 張海潮, 愛因斯坦對勞侖茲變換的簡單推導)。

註2: 任意兩個慣性系統之間時空的轉換只有兩種可能:

以月台與火車爲例 (見註1):

第一種可能是伽利略變換, 此時質點的速度無上限

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t; \end{aligned}$$

第二種可能是勞侖茲變換, 此時質點速度的最小上限是 L (例如 L 是光速)

$$\begin{aligned} x' &= x - vt\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{L^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t - \frac{vx}{L^2}\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{L^2}}; \end{aligned}$$

其間主要的區別在伽利略變換中, 時間是絕對的, 即 $t' = t$。

換句話說, 如果接受勞侖茲變換, 火車和月台的時間 t' 和 t 不會一致, 這一點讓許多人無法接受。(見數學傳播 43 卷 4 期, 張海潮, 熔伽利略與勞侖茲變換於一爐)。

註3: 括弧中的字句爲本文作者所加。

註4: 請參考程式人雜誌 2013 年 10 月號, 陳鍾誠《電磁學大師: 詹姆斯馬克士威》。

註5: $\nabla\cdot\mathbb{E}$ 稱爲 $\mathbb{E}$ 的散度 (divergence), $\nabla\times\mathbb{E}$ 稱爲 $\mathbb{E}$ 的旋度 (curl) 是向量微積分的基本教材。參見

1. Stewart, *Calculus*. 第17章。
2. Adams and Essex, *Calculus*. 第16章。
3. 電磁學天堂秘笈, 鄭以禎譯, 天下文化。

註6: 此處四個方程式中的變量均採用國際單位 (SI), 比方 ρ 的單位是庫侖/立方公尺, 常數 ε_0 的單位是庫侖/伏特 · 公尺, 常數 μ_0 的單位是伏特 · 秒/安培 · 公尺

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}, \quad \mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}$$

$\mu_0\varepsilon_0$ 恰好等於 $\frac{1}{9}\times 10^{-16}$ 即 $1/(光速)^2$。參見《電磁學天堂秘笈》192頁。

註 7: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\mathbb{E} = (E^1, E^2, E^3)$ 是向量場 $\mathbb{E} = \mathbb{E}(t, x, y, z)$, $f(t, x, y, z)$ 是一個函數, 則

$$\nabla \cdot \mathbb{E} = E^1_{,1} + E^2_{,2} + E^3_{,3} \text{ 是一個純量,}$$

$$\nabla \times \mathbb{E} = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ E^1 & E^2 & E^3 \end{vmatrix} = (E^3_{,2} - E^2_{,3}, E^1_{,3} - E^3_{,1}, E^2_{,1} - E^1_{,2}) \text{ 是一個向量,}$$

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \text{ 是一個向量 } \nabla^2 \mathbb{E} = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\mathbb{E}.$$

我們嘗試計算當 $\mathbb{E} = (\alpha, 0, 0)$ 時, $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2 \mathbb{E}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{E} &= (0, \alpha_{,3}, -\alpha_{,2}), \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) &= (-\alpha_{,2,2} - \alpha_{3,3}, \alpha_{,2,1}, \alpha_{,3,1}), \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) &= \nabla(\alpha_{,1}) = (\alpha_{,1,1}, \alpha_{,1,2}, \alpha_{,1,3}), \\ \nabla^2 \mathbb{E} &= (\nabla^2 \alpha, 0, 0) = (\alpha_{,1,1} + \alpha_{,2,2} + \alpha_{,3,3}, 0, 0), \end{aligned}$$

可看出 $\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}) - \nabla^2 \mathbb{E}$ (見電磁學天堂秘笈, p.189, p.213)。

註 8: 波動方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

式中 a 代表波速, 見 Courant and John, 《*Introduction to Calculus and Analysis*, VoI.II》 p.729.

註 9: 赫茲 (Henrich Hertz, 1857∼1894), 第一位以實驗驗證電磁波存在的科學家, 當時 30 歲。

註 10: 見《 *James Clerk Maxwell: Perspectives on his Life and Work*》 edited by Raymond Flood, Mark McCartney and Andrew Whitaker, p.201, Oxford University Press, 2014.

註 11: 見數學傳播 2013 年 37 卷 1 期, 張海潮, 狹義相對論箚記。

註 12: 設 $\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, 則 $\{\Lambda \mid \Lambda \eta \Lambda^t = \eta\}$,

等價於 $\{\Lambda \mid \eta = \Lambda^{-1} \eta (\Lambda^{-1})^t\}$, 亦即 Λ 勞侖茲 $\Leftrightarrow$ Λ^{-1} 勞侖茲。

又將 $\Lambda\eta\Lambda^t=\eta$ 左右均取反矩陣, 得 $(\Lambda^{-1})^t\eta\Lambda^{-1}=\eta$, 將 Λ^{-1} 改寫爲 Λ, 得 $\Lambda^t\eta\Lambda=\eta$。

故 $\Lambda\eta\Lambda^t=\eta$ 亦等價於 $\Lambda^t\eta\Lambda=\eta$, 因爲 $\Lambda=\Big(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\Big)$, 即 $\Lambda\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, 所以 $\Lambda^t\eta\Lambda=\eta$ 亦等價於 $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=y_0^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2$。

註 13: 見愛因斯坦《論動體之電動力學》, 中譯本二、電動力學部分, 新竹凡異出版社, 愛因斯坦文集第二卷。亦見 *A short course in General Relativity*, 作者 Foster, Nigthtingale, p.211, Springer New York, NY, 2006。

註 14: 此書譯名爲《馬克士威電理論之導論》。

—本文作者爲台大數學系退休教授—